Разбор задачи «Дождь»

Сначала ответим на вопрос, как получить минимальное время нахождения Кеши под дождём.

Рассмотрим два случая.

Первый: $u \leqslant w$. Кеша мог всё время, пока шёл дождь, провести в подземном переходе, и ответ будет 0.

Второй: $u > w$. Нужно предположить, что всё время, в течение которого Кеша шёл по подземному переходу, шёл дождь. Ответ в этом случае $u - v$, и не имеет значения, какую часть времени он прошёл до подземного перехода, а какую — после.

Теперь выясним, как получить максимальное время. Здесь также можно рассмотреть несколько случаев.

Если $u \leqslant max(d, p)$, то Кеша мог быть под дождём все время, в течение которого дождь шёл, и в этом случае ответ u.

Если же $u > max(d, p)$, то какую-то часть дождя Кеша провёл в подземном переходе.

Пусть $d \geqslant p$, тогда будем считать, что дождь начался сразу же, как только Кеша вышел из дома. Тогда он провёл под дождём d минут. Затем он спустился в переход, а дождь тем временем продолжал идти. Если длительность дождя меньше, чем $d + w$, то, когда Кеша вышел на улицу, дождя уже не было, и ответом будет d. В противном случае Кеша провёл под дождём $d + (u - w)$ минут.

Аналогичным образом рассмотрим ситуацию $p > d$. В этом случае будем считать, что дождь закончился в тот момент, когда Кеша пришёл к бассейну. Рассуждая так же, как в предыдущем случае, получим, что, если длительность дождя меньше, чем $p+w$, то ответом будет p, иначе Кеша проведёт под дождем $p + (u - w)$ минут.

Задача заключалась в том, чтобы аккуратно разобрать описанные случаи и вывести ответ в правильном порядке.

Разбор задачи «Две остановки»

Для решения этой задачи можно было либо вывести формулу, либо воспользоваться бинарным поиском для отыскания нужных точек. Опишем, как выводится формула.

Пусть Кеша стоит на расстоянии x от автобусной остановки и видит автобус. Это значит, что автобус находится на расстоянии a от Кеши и на расстоянии $a - x$ от автобусной остановки.

Кеша добежит до автобусной остановки за $x \cdot v$ миллисекунд, а автобус доедет до неё за $(a-x) \cdot u$ миллисекунд. Кеша должен прибежать быстрее или в тот же момент, что и автобус. Следовательно, должно выполняться неравенство $x \cdot v \leqslant (a-x) \cdot u$, откуда получаем $x \cdot (v+u) \leqslant a \cdot u$ и $x \leqslant a \cdot u/(v+u)$.

Таким образом, если совместить 0 на координатной прямой с автобусной остановкой, Кеша будет успевать на автобус, если находится на отрезке $[0, a \cdot u/(v + u)]$. Если правый конец этого отрезка будет расположен дальше, чем m (трамвайная остановка), мы уменьшим правую границу отрезка до m.

Теперь выясним, при каком условии Кеша успевает на трамвай.

Пусть Кеша находится на расстоянии x от автобусной остановки (т.е. $m - x$ до трамвайной) и видит трамвай. Это значит, что трамвай находится на расстоянии t метров от Кеши и на расстоянии $(t + m - x)$ от трамвайной остановки.

Кеша свой путь преодолеет за $(m-x) \cdot v$ миллисекунд, а трамвай проедет свой путь за $(t+m-x) \cdot w$ миллисекунд. Чтобы Кеша добежал до остановки раньше трамвая или одновременно с ним, должно выполняться неравенство $(m - x) \cdot v \leqslant (t + m - x) \cdot w$, откуда $x \cdot (w - v) \leqslant m \cdot (w - v) + t \cdot w$.

Прежде, чем выполнить деление на $(w - v)$, проанализируем знак этого выражения Если $w \geqslant v$, т.е. Кеша пробегает 1 метр за меньшее (или такое же) количество миллисекунд, нежели проезжает трамвай, то он успевает на трамвай всегда (поскольку они двигаются в одном направлении, плюс у Кеши есть «фора»). Поэтому при таком соотношении скоростей он может находиться в любой точке между автобусной и трамвайной остановками.

Таким образом, нас интересует только случай, когда $w < v$ (трамвай едет быстрее, чем бежит Кеша). Число $(w - v)$ будет отрицательным, поэтому после деления на него знак неравенства изменится: $x \geqslant m + t \cdot w/(w - v)$ (напомним, что x отсчитывается от автобусной остановки). Перепишем это неравенство так: $x \geqslant m - t \cdot w/(v - w)$. Таким образом, чтобы успеть на трамвай, Кеша должен находиться на отрезке $[m - t \cdot w/(v - w), m]$.

Заметим, что если t достаточно велико, а $w - v$ достаточно мало (Кеша хорошо видит и бегает почти со скоростью трамвая), то левая граница отрезка может оказаться меньше нуля (т.е. Кеша может находиться даже перед автобусной остановкой). Однако поскольку в условии оговорено, что Кеша там не будет гулять, будем в таком случае считать левую границу совпадающей с автобусной остановкой.

Наконец, нам остается выяснить, есть ли такой отрезок, по которому Кеша может гулять. Левая граница этого отрезка должна совпадать с левой границей отрезка, подходящего для ожидания трамвая (ещё левее смещаться нельзя), а правая — с правой границей отрезка, подоходящего для ожидания автобуса. Понятно, что отрезок существует, если $m - t \cdot w/(v - w) \leqslant a \cdot u/(v + u)$ (при равенстве вырождается в точку). Если же это неравенство не выполняется, то на оба вида транспорта Кеша не успеет (и ответ -1).

Чтобы соблюсти формат выходных данных, нам надо вывести $m - t \cdot w/(v - w)$ как минимальное расстояние от автобусной остановки и $m - a \cdot u/(v + u)$ как минимальное расстояние до трамвайной остановки. Разумеется, надо учитывать «обрезку» по нулю слева и по m справа (при необходимости).

Таким образом, решение состоит в разборе случаев и выводе формулы.

Разбор задачи «Площадь»

Эту задачу можно было решать несколькими способами. Кратко опишем основную идею одного из них (более подробное изложение появится позже).

Если бы в задаче не требовалось минимизировать кроме длины пути ещё и количество поворотов, путь Кеши было бы легко построить волновым алгоритмом. Чтобы учитывать количество поворотов, этот алгоритм необходимо усовершенствовать. В частности, нужно фиксировать в каждой клетке не только шаг, на котором мы в неё попали, но и количество поворотов, которое было сделано на пути в неё, а также направление движения Кеши в этой клетке (направлений движения всего 4).

Разбор задачи «Клумбы»

Эта задача решается с помощью динамического программирования.

Будем считать, что мы знаем ответ для количества клумб от 0 до некоторого значения i (заметим, что $dp[0] = 0$ и $dp[1] = f_1 \cdot 2$).

Обозначим через $dp[i]$ минимальное время, за которое можно высадить цветы в i клумб. Как узнать минимальное время, за которое можно высадить цветы в $i + 1$ клумбу?

Можно назначить еще одного работника на клумбу $\#(i + 1)$, то при таком раскладе высадить рассаду в $(i + 1)$ клумбу можно за $max\,(dp[i],\ f_i \cdot 2)$.

Можно поступить иначе: назначить на клумбы $\#i$ и $\#(i + 1)$ двух работников. При таком раскладе высадить рассаду в $(i + 1)$ клумбу можно за $max\,(dp[i - 1],\ f_{i-1} + f_{i-1}\,mod\,2 + f_i + f_i\,mod\,2)$ (слагаемые с $mod\,2$ необходимо добавить, поскольку работа с клумбой завершается лишь после высадки последнего цветка).

Сравним эти два варианта, выберем наименьший (лучший) из них и запишем его в $dp[i + 1]$. Продолжая действовать аналогичным образом, вычислим и значение $dp[n]$, которое и будет ответом.

Однако в задаче еще требуется указать, как назначить работников на клумбы. Возможны разные способы восстановления ответа. Мы предлагаем поддерживать массив $from$, элемент которого $from[i]$ хранит номер клумбы, которая позволила сформировать лучший ответ ($i - 1$, если было выгоднее назначить одного работника на клумбу $\#i$, и $i - 2$, если было выгоднее назначить двух работников на клумбы $\#(i - 1)$ и $\#i$).

Когда заполнение массива dp будет завершено, пройдем от конца к началу по массиву $from$ и заполним массив ответов.