Разбор задачи «Хорошая погода»

В этой задаче фактически нужно было аккуратно записать условия, определяющие, является ли погода хорошей с точки зрения товарища A, и является ли погода хорошей с точки зрения товарища B, после чего не менее аккуратно объединить полученные результаты.

Разбор задачи «Светофор»

В этой задаче нужно было проэмулировать работу светофора. Разумеется, нет необходимости знать его состояние в каждую единицу времени. Кнопка включения зеленого сигнала не игнорируется только впервые после очередного включения красного сигнала, и именно это нажатие определяет момент, когда в очередной раз включится зеленый сигнал.

В начальный момент времени $t = 0$ на светофоре включился красный сигнал, поэтому нам нужно было обработать первое нажатие на кнопку включения зеленого сигнала. Поскольку оно произошло в момент времени t_1, возможны два варианта:

- $t_1 \geqslant r$, и тогда зеленый сигнал включится в момент времени $\tilde{t}_1 = t_1 + d$
- $t_1 < r$, и тогда нам придется сравнить величины $t_1 + d$ и r и выбрать большую из них: $\tilde{t}_1 = max(t_1 + d, r)$.

Зеленый сигнал будет гореть в течение g единиц времени, после чего в момент времени $time = \tilde{t}_1 + g$ включится красный сигнал. Все нажатия на кнопку до истечения времени $time$ будут проигнорированы, после чего мы вновь оказываемся в ситуации «включился красный сигнал» и аналогичным образом обрабатываем первое (начиная с этого момента) нажатие на кнопку включения зеленого сигнала.

В примере, приведенном в задаче, разобраны все ситуации, которые могут возникнуть при работе светофора. Так что задача исключительно на аккуратную реализацию.

Разбор задачи «Цвет победы»

Эта задача, как и две предыдущие, тоже может быть отнесена к реализационным. Однако здесь уже требуется умение работать как минимум с массивами (структуры данных переменной длины также могут оказаться полезными).

Как и описано в задаче, необходимо завести двумерный массив $z[color][position]$, где на пересечении строки $color$ и столбца $position$ будет находиться число, обозначающее, сколько раз яхта с цветом паруса $color$ занимала в регатах место $position$. После этого для каждого цвета можно посчитать описанные в условии суммы (поскольку размер массива невелик, то необязательно даже подсчитывать суммы нарастающим итогом). Будем хранить в массиве $k[color]$ для каждого цвета $color$ наименьшее значение k_{color}, для которого $S_{[1..k_{color}]} > S_{[k_{color}+1..m]}$.

Далее остается найти минимальное значение k_{color} среди всех цветов и вывести в качестве ответа все цвета, для которых значение k_{color} минимально.

Разбор задачи «Спички»

В этой задаче нужно было понять, как формируются числа из спичек. Каждое число может быть представлено как разложение

$$n = c_0 \cdot 1 + c_1 \cdot 11 + c_2 \cdot 111 + \ldots$$

Проводя аналогию с системами счисления, будем записывать число от старших разрядов к младшим, используя цифры $0, 1, 2, \ldots, 9, A, B, \ldots$. Число, записанное таким образом, будем помечать как «$_{*?}$» («*» — поскольку у этой «системы счисления» переменное основание, а «?» — поскольку запись числа в этой «системе счисления» не всегда однозначна). Так, например, число 21_{10} может быть записано как $1A_{*?}$, а число 11_{10} как $10_{*?}$ или как $0B_{*?}$.

Оставляя строгие математические доказательства читателю, сформулируем следующие утверждения.

Утверждение 1. При оптимальной (здесь и далее — в смысле количества использованных спичек) записи числа не нужны цифры, большие или равные B. Например, $B000_{*?} = AA01_{*?} = 10A00_{*?}$, причем последнее представление использует меньше спичек.

Утверждение 2. При оптимальной записи числа все разряды справа от A равны 0. Например, $A01000_{*?} = A00A01_{*?} = 1000A00_{*?}$, причем последнее представление использует меньше спичек.

Заметим, что оптимальная запись числа (в смысле утверждений 1 и 2) существует и однозначна, поскольку может быть получена жадным представлением слева направо (см. примечание ниже). Например, число $A0_{*?}+1_{*?} = 100_{*?}$, а число $A0_{*?}$ наибольшее из записываемых двумя разрядами. Таким образом, если использовать только оптимальную запись чисел, то набор оснований $1, 11, 111, \ldots$ представляет собой полноценную систему счисления, которую мы будем обозначать как «$_*$». Кроме того, отдельно отметим, что в этой системе счисления числа сравниваются точно так же, как и в десятичной, то есть из двух чисел большим является то число, у которого в первом не совпадающем разряде стоит большая цифра.

Теперь будем решать задачу. Заметим, что если число x может быть представлено k спичками, число $x+1$ может быть представлено $k+1$ спичкой. Значит, ответ задачи есть число, на единицу меньшее наименьшего числа, представимого как минимум $n+1$ спичкой.

Осталось научиться находить наименьшее число, представимое как минимум $n+1$ спичкой. Для этого выполним предпросчет наибольшего количества спичек, необходимого для записи содержащего не более k разрядов числа («худшее» число имеет вид $999\ldots9A_*$). Будем выписывать число в системе счисления $_*$ справа налево, и, пока остаток спичек превышает возможности следующих разрядов, будем увеличивать текущий разряд на 1. Переведя это число из системы $_*$ в десятичную и вычтя единицу, получим ответ.

Примечание (о жадном представлении слева направо). Под жадным представлением здесь подразумевается вычитание на каждом шаге наибольшего доступного значения разряда. Например, представление числа 30_{10} в троичной системе счисления будет получено так: $30_{10} = 27_{10} + 3_{10} = 1000_3 + 10_3 = 1010_3$. Подобное представление верно, если наибольшее записываемое k разрядами число на единицу меньше значения разряда $k+1$. Последнее верно как для троичной системы счисления, так и для двоичной, десятичной, шестнадцатеричной, фибоначчиевой, обозначенной нами $_*$, и так далее. Например, при $k = 2$: $8_{10} + 1_{10} = 22_3 + 1_3 = 100_3 = 9_{10}$.

Разбор задачи «Любитель искусства»

Для начала заметим, что мы можем упорядочить актеров так, чтобы в силу условия задания А и В не могли слушать артиста, выписанного позже в списке, раньше актера, выписанного раньше в списке (то есть мы можем слушать артистов только в порядке списка). Для этого нужно упорядочить актеров в первую очередь по возрастанию координаты, а во вторую очередь - по убыванию времени выступления. Далее все номера актеров будем записывать в этом порядке.

Пусть теперь $f_i(k)$ наибольшее удовольствие, которое мы можем получить, если будем слушать ровно k актеров из первых i (включительно). Доопределим $f_0(0) = 0$ и $f_0(k) = -\infty$ при $k > 0$, где под ∞ подразумевается достаточно большое целое число.

Каждого актера мы можем либо слушать, либо не слушать. Если мы могли слушать актера i, то есть $s_i \leqslant (x_i + k - 1) \leqslant f_i$ и $k > 0$, тогда $f_i(k) = \max(f_{i-1}(k), f_{i-1}(k-1) + c_i)$, в противном противном случае $f_i(k) = f_{i-1}(k)$.

Мы получили рекуррентное выражение для $f_i(k)$, остается только вычислить значения этой функции для всех i и k, после чего наибольшее из $f_n(k)$ будет наибольшим возможным удовольствием, то есть первым числом ответа задачи. Актеров, которых мы будем слушать, можно найти, если запомнить для всех i и k, принимали мы решение брать текущего актера или нет, после чего возвращаться от ответа по цепочке его вычисления.